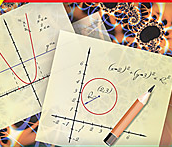
**Загальноосвітня школа І- ІІІ ступенів № 2**

**м. Красноармійська**

**Задачі з параметрами**

****

**Посібник**

**для факультативного курсу 9 класу**

**м. Красноармійськ**

**2012**

**Укладачі**: вчитель математики ЗОШ №2 Рагуліна О.В., учні 9-А класу Багрій К., Крутенко Н., Васильєва К., Овчаренко Д.

**Задачі з параметрами.** Посібник для факультативного курсу в 9 класі.

Навчальний посібник призначений для вчителів математики та учнів 9 (10-11) класу для занять факультативу, підготовки до олімпіад, ДПА, ЗНО, для самостійної роботи учнів.

В посібник включено всі основні типи простих задач з параметрами на базі математики базової школи. До всіх задач наведені розв’язки.

**ЗМІСТ**

Тема 1. Знайомство з параметрами.

Тема 2. Лінійні рівняння та нерівності з параметрами

Тема 3. Квадратний тричлен. Квадратична функція

Тема 4. Рівняння з модулями, що містять параметр

Тема 5. Раціональні рівняння з параметрами

Тема 6. Графічні прийоми розв’язування задач з параметрами

**Тема 1. Знайомство з параметрами.**

Цей посібник адресований в першу чергу тим, хто має мінімальну уяву про задачі з параметрами. Відомо, що в програмах з математики для неспеціалізованих шкіл цим задачам відводиться незначне місце. Тому в першу чергу розглянемо розділи шкільної математики, в яких, взагалі, присутня сама ідея параметрів.

Так, з параметрами учні зустрічаються при введенні деяких понять. Розглянемо як приклади наступні об’єкти.

Функція пряма пропорційність: *y=kx* (*x* і *y -* змінні, *k –* параметр, );

Лінійна функція: *y=kx+b* (*x* і *y -* змінні, *k* i b *–* параметри);

Лінійне рівняння: *ax+b=0* (*x -* зміннa, ai b *–* параметри);

Рівняння першого степеня: *ax+b=0* (*x -* зміннa, ai b *–* параметри, );

Квадратне рівняння: (*x -* зміннa, a, b і с *–* параметри, ).

До задач з параметрами, можна віднести, наприклад, пошук розв’язків лінійних і квадратних рівнянь в загальному вигляді, дослідження кількості їх коренів в залежності від значення параметрів.

Основне, що потрібно засвоїти при першому знайомстві з параметром, - це необхідність обережного звертання до фіксованого але невідомого числа.

Розв’язати рівняння з параметром означає, що для кожного значення параметра треба встановити, чи має рівняння розв’язки, і якщо має, то знайти ці розв’язки, що, як правило, залежать від параметра.

Розглянемо ряд прикладів:

***Вправа*** 1. Порівняємо *-а* і *3а*.

Розв’язання

Розглядаємо три випадки:

1. Якщо , то ;
2. Якщо , то ;
3. Якщо , то .

***Вправа*** 2. Розв’яжемо рівняння: 1) ; 2)

Розв’язання

1. На перший погляд відповідь очевидна: . Однак при *а=0* дане рівняння не має розв’язків.

Відповідь. Якщо *а=0*, то розв’язків не має; якщо , то

1. Перетворимо спочатку рівняння . Рівняння має єдиний розв’язок незалежно від значення параметра а. Наприклад,

якщо

Зауважимо, що параметр а може набувати будь-яких значень, а значення *х* знаходимо за формулою .

Відповідь. для будь-якого значення параметра *а*.

***Вправа 3 .***, для якого а число 4,5 є коренем рівняння? Оскільки число 4,5 є коренем даного рівняння, то воно перетворює рівняння в правильну рівність: , звідки .

.

***Вправа 4.*** Розв’язати рівняння.

У запропонованому рівнянні коефіцієнт при *х* дорівнює *а*. Тому можливі випадки:

а) коефіцієнт при *х* дорівнює 0 і рівняння має вигляд та немає коренів;

б) коефіцієнт при х не дорівнює 0. Тоді поділимо обидві частини рівняння на коефіцієнт : , ,

.

. Якщо *а=0*, то рівняння розв’язку немає; якщо , то.

, де *а* параметр

У запропонованому прикладі відповідь може бути записана так:

Якщо , то розв’язків немає; якщо , то .

***Вправа*** 6. Розв’язати рівняння .

Розв’язання

Очевидно, що для розв’язку цього рівняння достатньо розглянути такі випадки:

1. ; тоді рівняння матиме вигляд *0х=2* і немає розв’язків;
2. ; рівняння матиме вигляд *0х=0* і матиме безліч розв’язків;
3. ; маємо .

Відповідь. Якщо , то х- будь-яке число; якщо , то розв’язків немає; якщо , то .

***Вправа*** 7. Розв’язати нерівність .

Розв’язання

Аналіз трьох можливостей , , дозволяє отримати результат:

Відповідь. Якщо , то ; якщо , то х – будь-яке число; якщо , то .

***Вправа*** 8. Розв’язати нерівність .

Розв’язання

Очевидно, що при права частина нерівності від’ємна, тоді при будь-якому *х* ліва частина більша правої. У випадку, коли *а=0*, варто не пропустити той факт, що дану нерівність задовольняють всі дійсні числа, крім .

Відповідь. Якщо , то *х* - будь-яке число; якщо *а=0,*  або .

***Вправа*** 9. Розв’язати рівняння .

Розв’язання.

існує для будь-якого *х*, при всіх *а*. Учні часто допускаються помилки, вважаючи розв’язком рівняння єдиний корінь *х = а*, адже при від’ємних значеннях *а* дана рівність неможлива.

Відповідь. Якщо , то *х = а*; якщо , то розв’язків немає.

***Вправа*** 10. Розв’язати рівняння .

Розв’язання.

Очевидно, що *х = а* – єдиний корінь рівняння, проте слід пам’ятати, що , а тому .

Відповідь. Якщо , то *х = а;* якщо *а=1*, то розв’язків немає.

***Вправа*** 11. Розв’язати нерівність .

Розв’язання

Зауважимо, що для всіх невід’ємних *х*. Очевидно, що відповідь залежить від знака двочлена *а -1*. При і дана нерівність справедлива для всіх . А для всіх , , очевидно, що дана нерівність інших розв’язків крім *х=0* немає.

Відповідь. Якщо то ; якщо , то *х=0.*

***Вправа*** 12. При яких натуральних значеннях а корінь рівняння

є натуральним числом?

Розв’язання

Лінійне рівняння , тоді

* дільник числа 5, тобто при а=3.

Відповідь. 3.

***Вправа*** 13. При яких цілих значеннях коренем рівняння є ціле число?

Розв’язання

При рівняння має корінь є цілим дільником числа 7. Оскільки число 7 є простим числом, то його цілими дільниками є числа: 1; 7; -1; -7. Отже, значення параметра знайдемо з таких умов: а+1=1, а+1=7, а+1= -1, а+1= -7.

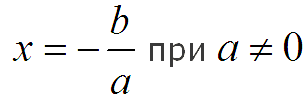
Розв’язавши ці рівняння, маємо а = 0, а = - 2, а = - 8, а = 6.

Відповідь. -8; -2; 0; 6.

**Тема 2. Лінійні рівняння та нерівності з параметрами**

Розв'язки лінійного рівняння

Рівняння  називається лінійним, якщо коефіцієнт .

* воно має єдиний розв'язок ;
* якщо обидва коефіцієнти дорівнюють нулю *а=0* і *b=0*,

то рівняння перетворюється в тотожність ,

і його розв'язками є всі дійсні числа.

* якщо  і , то рівняння перетворюється в неправильну рівність  і воно не має розв'язків.

***Вправа*** 14. Розв’язати рівняння

1. Знайдемо ті значення параметра, які перетворюють у нуль коефіцієнт при х:

, *а=0* або *а=2*.

Якщо *а=0,* рівняння матиме вигляд, таке рівняння розв’язків немає.

Якщо *а=2*, то , тобто х – будь-яке число.

Якщо , , то .

Відповідь. Якщо *а=0*, то немає коренів; якщо *а=2*, то *х* -будь-яке число: якщо , то .

***Вправа 15.***

: , .

, тобто х – будь-яке число.

Якщо *а=-1*, то , це рівняння розв’язків немає.

Якщо , то .

Відповідь. Якщо а=1, то х – будь-яке число; якщо , то розв’язків немає; якщо , то .

***Вправа 16.***

1. , , або .

Якщо , то , х – будь-яке число.

Якщо , то немає коренів.

1. Якщо , , то .

Відповідь. Якщо , то рівняння немає коренів; якщо , то х – будь-яке число; якщо , , то .

***Вправа*** 17. Розв’язати рівняння .

Розв’язання. Дане рівняння рівносильне системі

Звідси - корінь даного рівняння при будь-якому *а*, а *х=1* – корінь лише при *х = а*.

Відповідь. Якщо , то , або ; якщо , то ; якщо , то .

***Вправа*** 18. При яких а нерівність має єдиний розв’язок?

Розв’язання

Очевидно, що а=2 задовольняє вимозі задачі. Дійсно, при *а=2* отримуємо нерівність , що має єдиний розв’язок. Для випадку, коли , розв’язком нерівності буде відрізок, тобто безліч розв’язків.

Відповідь. *а=2.*

***Вправа*** 19. При яких значеннях *а* розв’язком нерівності

буде відрізок?

Розв’язання

Оскільки , то дана нерівність рівносильна системі:

Розв’язком нерівності системи буде відрізок . Отже, при розв’язком рівняння також буде відрізок.

Відповідь. .

***Вправа*** 20. При кожному значенні розв’язати рівняння

.

Розв’язання

Запишемо дане рівняння у вигляді .

Якщо а=9, то рівняння набуває вигляду 0, коренем цього рівняння є будь-яке число;

Якщо , , то

Відповідь. Якщо , то коренів немає; якщо , то х - будь-яке число; якщо , , то

***Вправа*** 21. Розв’язати рівняння , де а – параметр.

Розв’язання.

Оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю, то а=0 не належить області допустимих значення параметра а.

Перетворимо рівняння: , .

Для розглянемо два випадки:

1. Коефіцієнт при х дорівнює нулю, тобто , , .

Тоді маємо рівняння: , що не має коренів.

1. Коефіцієнт при х не дорівнює нулю, тобто , . Тоді .

Відповідь. Якщо , то рівняння коренів немає; якщо , то .

**Тема 3. Квадратний тричлен. Квадратична функція.**

*Класифікація задач на дослідження квадратного тричлена*

*Нехай - квадратний тричлен, коефіцієнти якого залежать від параметра а; – дискримінант цього рівняння; - абсциса вершини параболи; - ордината вершини параболи; - значення квадратного тричлена при х=.*

*Сформулюємо такі основні задачі:*

1. *Розв’язати рівняння (А1)*
2. *Розв’язати одну з нерівностей (Б1) або їх систему:*
3. *Знайти всі значення а, за яких рівняння має дійсні корені, і визначити їх знаки*
4. *Дослідити розташування дійсних коренів рівняння (А1) відносно заданої точки чи проміжку*
5. *Знайти всі значення параметра а,за яких з однієї нерівності випливає інша*
6. *Визначити всі значення а, за яких корені рівняння (А1) задовольняють задану умову*
7. *Знайти всі значення параметра а, за яких рівняння*

*та мають спільні корені (або хоча б один спільний корінь)*

1. *Знайти всі значення а, за яких квадратний тричлен*

*чи задана функція , де - дійсні корені рівняння (А1), набуває найбільшого (найменшого) значення на заданому проміжку.*

***Вправа*** 22. Розв’язування квадратного рівняння з коефіцієнтами, залежними від параметра:

(1)

еквівалентне сукупності двох систем:

та (2)

Якщо - корені рівняння , то при маємо , а при .

***Вправа*** 23. Розв’язати рівняння

Розв’язання

Дане рівняння еквівалентне сукупності двох систем (див. (2)):

та

Розв’язуючи нерівність , знаходимо ті значення а, за яких набувають дійсних значень:

\, то

Відповідь. Якщо а=2, то х=; якщо

***Вправа 24.***  Розв’язати нерівність

.

.

лінійною, тобто , .

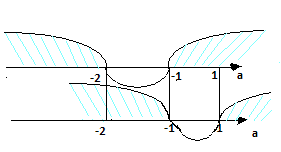
Підставимо ці значення *а* в нерівність і одержимо при *а=1*:

, , а при *а=-1*: 1>0 , .

При обчислимо дискримінант D і подамо його у формі, зручній для визначення проміжків знакосталості:

;

На паралельних координатних осях а відкладаємо проміжки знакосталості D та А (мал.1)

(мал.1)

Провівши через точки а= -2, а= -1, а=1 вертикальні прямі, одержимо проміжки, на кожному з яких легко вказати вид розв’язку даної нерівності.

,

Якщо , то

Якщо *а=2*, то

Якщо

Якщо

*Розв’язання задач, пов’язаних із знаходженням значень параметра, при яких корені квадратного рівняння задовольняють задані умови*

*Для визначення значень параметра а, при яких корені квадратного рівняння та при задовольняють умову*

*=0, розглянемо систему рівнянь, еквівалентну поставленій задачі:*

*Визначимо з довільної пари рівнянь та і, підставляючи знайдені вирази в рівняння, що залишилося, одержимо співвідношення для знаходження шуканих значень а. При виборі пари рівнянь для визначення та варто виходити з простоти їх розв’язання. Дискримінант має бути невід’ємний.*

***Вправа 25***. При яких значеннях а один з коренів рівняння

дорівнює квадрату іншого?

Розв’язання. Для визначення шуканих значень а складемо систему, в якій два перші рівняння описують теорему Вієта для даного квадратного рівняння , , а третє співвідношення містить умову, яка накладається на його корені:.

У даному випадку для визначення та зручно вибрати друге і третє рівняння системи:

тобто

Підставляючи знайдені вирази в перше рівняння системи, одержимо:

, ,

Відповідь. *а= -1*, або *а=3*.

***Вправа*** 26. При яких значеннях параметра а корені рівняння

(1.1)

більші 1?

Розв’язання

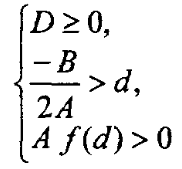
Очевидно, що задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра а корені квадратного тричлена більші 1.

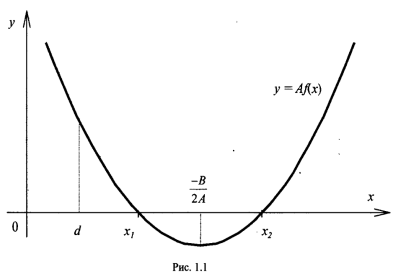
Перехід від одного формулювання задачі до іншого, підкреслює загальну ідею, що пов’язана з описом тих чи інших властивостей квадратного тричлена в їх геометричній інтерпретації на графіку.

Для того, щоб корені квадратного тричлена

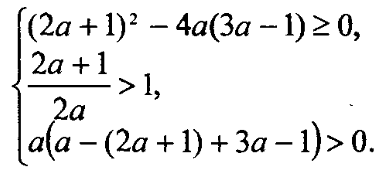
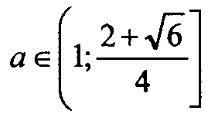
(1.2)

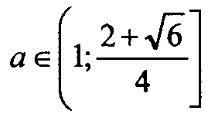
були більші числа d, необхідно і достатньо виконання умов

 (1.3) (див. рис. 1.1)



При а=0 рівняння (1.1) має корінь х= -1, який не задовольняє умову задачі.

Розглянемо випадок . При таких а умови (1.3) запишуться у вигляді . Розв’язуючи цю систему, знаходимо, що . Очевидно, що цей же результат ми отримали б і розв’язуючи нерівність , де - менший корінь рівняння (1.1).

Відповідь. .

***Вправа*** 27. При яких значеннях параметра *а* один із коренів рівняння

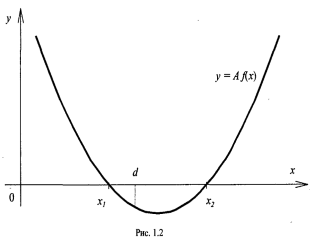


більший числа *а*, а другий менший числа *а*?

Розв’язання

Задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра а корені квадратного тричлена лежать на дійсній осі по різні сторони від точки ?

Для розв’язування цієї задачі скористаємося тим загальним фактом, що для того щоб корені квадратного тричлена (1.2) лежали на дійсній осі по різні сторони від числа d, необхідно і достатньо виконання умови (див. рис. 1.2)



В нашому випадку ця умова приймає вигляд .

Тобто, вимогу задачі задовольняють розв’язки нерівності

, де 

(не задовольняють вимогу задачі).

Розв’язуючи отриману нерівність, знаходимо, що 

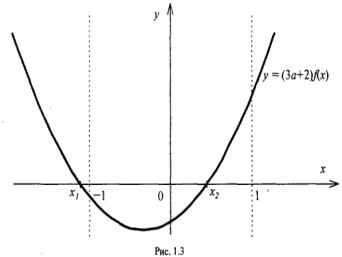
Варто сказати, що розв’язуючи цю задачу іншим способом, розглядаючи нерівності  і  досить складно.

Відповідь..

***Вправа 28***. При яких значеннях параметра *а* корені та рівняння задовольняють умовам 

Розв’язання

Задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра *а* тільки один, а саме – більший корінь квадратного тричлена де належить інтервалу (-1; 1), а другий – менший -1.



Вимоги в даній задачі виконуються тільки з-за умов:



Таким чином ми приходимо до системи



Розв’язуючи цю систему, приходимо до висновку, що .

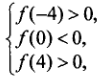
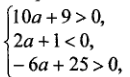
Відповідь. 

***Вправа 29***. При яких значеннях параметра *а* корені рівняння

мають різні знаки і обидва по модулю менші 4?

Розв’язання

Нехай . Тоді вимоги задачі виконуються, якщо сумісна система

, яку запишемо у вигляді і якій задовольняють всі .

Відповідь. .

***Вправа 30***. При яких значеннях параметра *а* один із коренів рівняння по абсолютній величині більший 1, а другий менший одиниці?

Розв’язання

Задача рівносильна наступній:при яких значеннях параметра а один з двох коренів квадратного тричлена належать на дійсній осі інтервалу ,

А другий розміщений поза цим інтервалом, і по модулю не дорівнює одиниці?

Користуючись графіком, відмічаємо, що рівно один корінь тричлена  належить інтервалу  тільки в тому випадку, коли числа  і  мають різні знаки (корені по модулю не дорівнюють 1), приходимодо висновку, що вимоги задачі виконуються тільки при умові яка в нашому випадку запишеться у вигляді 

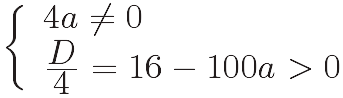
Розвязуючи цю нерівність, знаходимо, що 

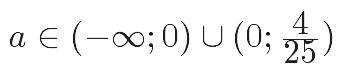
Відповідь. 

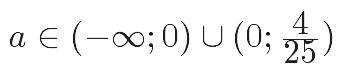
***Вправа 31***. При якому значенні параметра *а* парабола 

має з віссю ОХ дві спільні точки?

Розв’язання

Даний квадратний тричлен має два різних дійсних корені, якщо виконуються умови:  .

Розв’язком системи є проміжок .

Відповідь.

***Вправа 32***. При яких значеннях параметра *а* квадратний тричлен можна представити у вигляді повного квадрата?

Розвязання.

Квадратний тричлен можна представити у вигляді , якщо його корені рівні  Тобто . В даному випадку . Розв’язуючи останнє рівняння, отримуємо і .

Відповідь. , .

***Вправа 33***. Знайти значення параметра *а*, при яких нерівність  виконується для всіх *х*.

Розв’язання

Графік квадратного тричленарозміщений не нижче осі *ОХ*  при виконанні умов:

В даній задачі ці умови мають вигляд:.

Розв’язком цієї системи є .

Відповідь. .

**Тема 4. Рівняння з модулями, що містять параметр**

***Вправа 34.*** Розв’язати рівняння залежно від параметра а:

а)

б)

Розв’язання

а) , .

, .



Якщо , то .

або

або

Якщо , то рівняння немає коренів; якщо , то рівняння має один корінь ; якщо , то рівняння має два корені та .

Відповідь.

Якщо : немає коренів;

якщо : ;

якщо : , .

б)

Розв’язання

Якщо а=1, то рівняння має безліч коренів ;якщо , то рівняння матиме один корінь, який знайдемо із систем

Отже, при , при

Відповідь. якщо а=1:

якщо : ;

якщо .

**Тема 5. Раціональні рівняння з параметрами**

***Вправа 35.*** В залежності від значення параметра а визначити число коренів рівняння .

Розв’язання

Дане рівняння є раціональним рівнянням четвертого степеня, отже, може мати не більше 4 коренів. Нехай , перепишемо рівняння у вигляді .

Вихідне рівняння має 4 корені, якщо останнє квадратне рівняння має 2 різні додатні корені. Достатні умови цього записані у вигляді системи (вітки параболи направлені в гору):

звідки слідує: .

Якщо один із коренів а другий корінь , то вихідне рівняння буде мати 3 корені. Запишемо умови цього випадку:

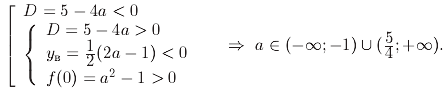
звідки слідує, що.

Вихідне рівняння по змінній х буде мати 2 корені , якщо один із коренів а другий корінь . Умовою цього випадку буде нерівність , або .

Крім цього, якщо , то вихідне рівняння також має 2 корені .

Розглянемо тепер випадок, коли а другий корінь . Тоді вихідне рівняння по змінній х буде мати єдинний корінь . Достатньою умовою цього є система:

І нарешті, вихідне рівняння не буде мати розв’язків в двох випадках: або коли обидва корені від’ємні і другий корінь ; або коли коренів у квадратного рівняння взагалі немає, тобто . Достатня умова відсутності коренів визначається сукупністю

****

Відповідь. Якщо : 4 корені;

якщо : 3 корені;

якщо : 2 корені;

якщо : 1 корінь;

якщо : коренів немає.

***Вправа 36.*** При яких значеннях параметра а нерівність

немає розв’язків, більших 1?

Розв’язання

Приведемо нерівність до вигляду . Оскільки дискримінант чисельника для будь-якого а, запишемо рівносильну нерівність , де

; .

Розв’язуючи останню нерівність методом інтервалів, приходимо до висновку, що умова задачі буде виконуватися тільки при такому розміщенні точок , а на осі абсцис, при якому сумісна система нерівностей:

.

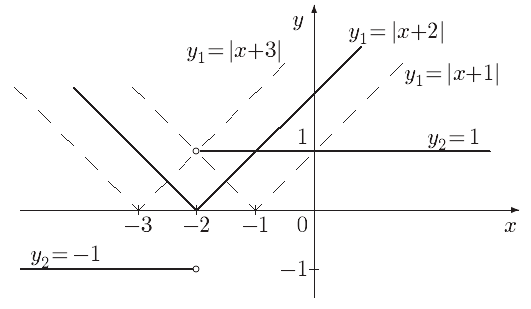
**Тема 6. Графічні прийоми розв’язування задач з параметрами**

***Вправа 37.*** Знайти всі значення параметра а за яких графіки функцій

** та ** мають одну спільну точку.

Розв’язання.

Побудуємо на одній координатній площині графіки даних функцій. Графік **** складається із двох променів, паралельних осі ОХ і не існує при х дорівнює -2. Графік функції  отримаємо із графіка паралельним перенесенням вліво, якщо  і вправо якщо 

****

З малюнка слідує, що графіки мають одну спільну точку, якщо  Якщо а= - 3, спільних точок немає, оскільки графік проходить через виколоту точку .

Відповідь. 

1. При яких значеннях параметра а нерівність справедлива для всіх значень х?

Розв’язання

Якщо , то дана нерівність рівносильна нерівності  або 

Остання квадратна нерівність буде справедлива для всіх х з проміжку  якщо виконується умова  тобто 

Якщо , то по аналогії з попереднім випадком переходимо до нерівності яка справедлива для усіх х із розглядуваного проміжку за умови  тобто 

Відповідь.

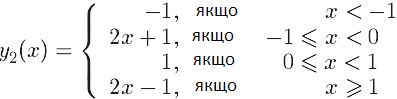
***Вправа 38.*** В залежності від значення параметра *а* розв’язати нерівність 

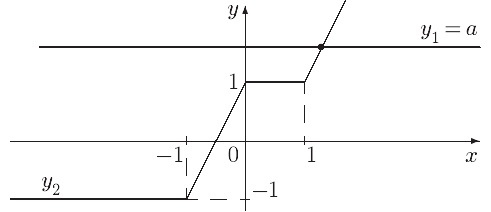
Розв’язання

Перепишемо дану нерівність у вигляді 

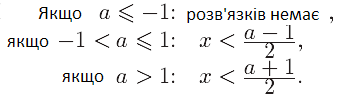
Розглянемо дві функції (графік – пряма, паралельна осі Ох) і 

Другу функцію, розкриваючи модулі, можна записати так:





Графіком  є ламана, зображена на малюнку. Розв’язком нерівності будуть ті значення х, за яких точки графіка будуть розміщені вище точок графіка . На основі малюнка одержуємо, що якщо  таких точок немає, а якщо , то це точки виду , тобто ; якщо а=1, то розв’язки отримуємо із нерівності , звідки .

Відповідь.

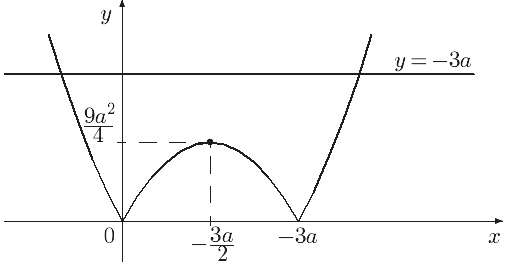
***Вправа 39.*** Вказати всі значення параметра , при яких графіки функцій  та  мають тільки дві спільні точки.

Розв’язання

Перш за все відмітимо, що рівняння може мати розв’язки тільки при  за умовою). Графік отримаємо з параболи  відображенням

від’ємної частини симетрично осі Ох. Корені цієї параболи  та  вершина знаходиться в точці  і 

Графіком  є пряма, паралельна осі Ох.



З малюнка слідує, що графіки даних функцій мають дві спільні точки  при умові, що 



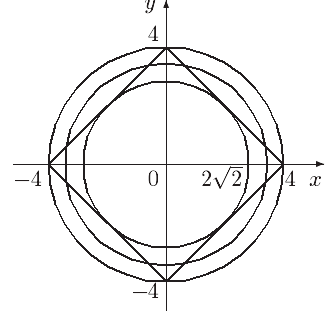
Відповідь. 

***Вправа 40.*** В залежності від значення параметра а розвязати систему ****

Розв’язання

З геометричної точки зору кількість розвязків системи – це число точок перетину при кожному фіксованому значенні параметра *а* кривих, заданих рівняннями системи.

Розглядуємо в першому рівнянні 4 випадки і розкриваючи модулі, отримаємо, що це рівняння задає квадрат (див. мал.). Друге рівняння – це сімейство кіл радіуса () з центром в початку координат. Якщо а=0, то коло вироджується в точку.

****

Із малюнка слідує, що коли коло дотикається квадрата всередині, тобто якщо (а=8) і якщо (а=16) (коло проходить через вершини квадрата) система має 4 розв’язки.

Якщо спільних точок у кола і квадрата 8.

Якщо розв’язків немає.

Відповідь.

Якщо розв’язків немає;

Якщо а=8 ; а=16: 4 розв’язки;

Якщо : 8 розв’язків.

**Література**

1. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів «Математики», МОН України, ст.. 24-28, 67-72
2. Т.С. Непочатова, І.О. Сіренький, Г.С. Смішко «Математичні олімпіади Хмельниччини», інформаційний вісник ХОІППО, 2009
3. П.І. Горнштейн «Задачі з параметрами», Київ, РІА «Текст», 1992
4. Є.А.Єфімов, Л.В.Коломієць, Задачі з параметрами, навчальний посібник для факультету довузівської підготовки, Самара, 2006
5. Науково-методичний журнал «Математика в школах України»