**Загальноосвітня школа І- ІІІ ступенів № 2**

**м. Красноармійська**

**Задачі з параметрами**

****

**Посібник**

**для факультативного курсу 9 класу**

**м. Красноармійськ**

**2012**

**Укладачі**: вчитель математики ЗОШ №2 Рагуліна О.В., учні 9-А класу Багрій К., Крутенко Н., Васильєва К., Овчаренко Д.

**Задачі з параметрами.** Посібник для факультативного курсу в 9 класі.

Навчальний посібник призначений для вчителів математики та учнів 9 (10-11) класу для занять факультативу, підготовки до олімпіад, ДПА, ЗНО, для самостійної роботи учнів.

В посібник включено всі основні типи простих задач з параметрами на базі математики базової школи. До всіх задач наведені розв’язки.

**ЗМІСТ**

Тема 1. Знайомство з параметрами.

Тема 2. Лінійні рівняння та нерівності з параметрами

Тема 3. Квадратний тричлен. Квадратична функція

Тема 4. Рівняння з модулями, що містять параметр

Тема 5. Раціональні рівняння з параметрами

Тема 6. Графічні прийоми розв’язування задач з параметрами

**Тема 1. Знайомство з параметрами.**

Цей посібник адресований в першу чергу тим, хто має мінімальну уяву про задачі з параметрами. Відомо, що в програмах з математики для неспеціалізованих шкіл цим задачам відводиться незначне місце. Тому в першу чергу розглянемо розділи шкільної математики, в яких, взагалі, присутня сама ідея параметрів.

Так, з параметрами учні зустрічаються при введенні деяких понять. Розглянемо як приклади наступні об’єкти.

Функція пряма пропорційність: *y=kx* (*x* і *y -* змінні, *k –* параметр, $k\ne 0$);

Лінійна функція: *y=kx+b* (*x* і *y -* змінні, *k* i b *–* параметри);

Лінійне рівняння: *ax+b=0* (*x -* зміннa, ai b *–* параметри);

Рівняння першого степеня: *ax+b=0* (*x -* зміннa, ai b *–* параметри, $b\ne 0$);

Квадратне рівняння: $ax^{2}+bx+c=0$ (*x -* зміннa, a, b і с *–* параметри, $а\ne 0$).

До задач з параметрами, можна віднести, наприклад, пошук розв’язків лінійних і квадратних рівнянь в загальному вигляді, дослідження кількості їх коренів в залежності від значення параметрів.

 Основне, що потрібно засвоїти при першому знайомстві з параметром, - це необхідність обережного звертання до фіксованого але невідомого числа.

Розв’язати рівняння з параметром означає, що для кожного значення параметра треба встановити, чи має рівняння розв’язки, і якщо має, то знайти ці розв’язки, що, як правило, залежать від параметра.

Розглянемо ряд прикладів:

***Вправа*** 1. Порівняємо *-а* і *3а*.

Розв’язання

Розглядаємо три випадки:

1. Якщо $а<0$, то $-а>3а$;
2. Якщо $а=0$, то $–а=3а$;
3. Якщо $а>0$, то $-а<3а$.

 ***Вправа*** 2. Розв’яжемо рівняння: 1) $ах=1$; 2) $х-3=а+1$

Розв’язання

1. На перший погляд відповідь очевидна: $х=\frac{1}{а} $. Однак при *а=0* дане рівняння не має розв’язків.

Відповідь. Якщо *а=0*, то розв’язків не має; якщо $а\ne 0$, то $х=\frac{1}{а}$

1. Перетворимо спочатку рівняння $х=а+4$. Рівняння має єдиний розв’язок незалежно від значення параметра а. Наприклад,

якщо $а=1, то х=5;$ $а=0, то х=4;$ $а=-4, то х=0.$

Зауважимо, що параметр а може набувати будь-яких значень, а значення *х* знаходимо за формулою $х=а+4$.

Відповідь. $х=а+4$ для будь-якого значення параметра *а*.

***Вправа 3 .***$ х-3=а+1$, для якого а число 4,5 є коренем рівняння? Оскільки число 4,5 є коренем даного рівняння, то воно перетворює рівняння в правильну рівність: $4,5-3=а+1$, звідки $а=0,5$.

$Відповідь$. $а=0,5$

***Вправа 4.*** Розв’язати рівняння$ах+7=а$.

У запропонованому рівнянні коефіцієнт при *х* дорівнює *а*. Тому можливі випадки:

а) коефіцієнт при *х* дорівнює 0 і рівняння має вигляд $0∙х=-7$ та немає коренів;

б) коефіцієнт при х не дорівнює 0. Тоді поділимо обидві частини рівняння на коефіцієнт $а\ne 0$: $ах+7=а$, $ах=а-7$,

$х=\frac{а-7}{а}$.

$Відповідь$. Якщо *а=0*, то рівняння розв’язку немає; якщо $а\ne 0$, то$ х=\frac{а-7}{а}$.

$Вправа 5. Розв'язати рівняння \left(а+4\right)х+4=а$, де *а* параметр$Слід звернути увагу учнів на конструкцію запису відповіді:$

$"якщо а …, то х…", або$ $"якщо х…, то а…".$

У запропонованому прикладі відповідь може бути записана так:

Якщо $а=-4$, то розв’язків немає; якщо $а\ne -4$, то $х=\frac{а-4}{а+4}$.

***Вправа*** 6. Розв’язати рівняння $\left(a^{2}-1\right)x=a+1$ .

Розв’язання

Очевидно, що для розв’язку цього рівняння достатньо розглянути такі випадки:

1. $а=1$; тоді рівняння матиме вигляд *0х=2* і немає розв’язків;
2. $а=-1$; рівняння матиме вигляд *0х=0* і матиме безліч розв’язків;
3. $а\ne \pm 1$; маємо $х=\frac{а+1}{а^{2}-1}=\frac{1}{а-1}$.

Відповідь. Якщо $а=-1$, то х- будь-яке число; якщо $а=1$, то розв’язків немає; якщо $а\ne \pm 1$, то $х=\frac{1}{а-1}$.

 ***Вправа*** 7. Розв’язати нерівність $ах<1$.

Розв’язання

Аналіз трьох можливостей $а>0$, $а<0$ , $а=0$ дозволяє отримати результат:

Відповідь. Якщо $а<0$, то $х>\frac{1}{а}$ ; якщо $а=0$, то х – будь-яке число; якщо $а>0$, то $х<\frac{1}{а}$ .

 ***Вправа*** 8. Розв’язати нерівність $\left|х+3\right|>-а^{2}$.

Розв’язання

Очевидно, що при $а\ne 0$ права частина нерівності від’ємна, тоді при будь-якому *х* ліва частина більша правої. У випадку, коли *а=0*, варто не пропустити той факт, що дану нерівність задовольняють всі дійсні числа, крім $х=-3$.

Відповідь. Якщо $а\ne 0$, то *х* - будь-яке число; якщо *а=0,* $х<3$ або $х>3$.

***Вправа*** 9. Розв’язати рівняння $\sqrt[3]{х}=а^{\frac{1}{3}}$.

Розв’язання.

$\sqrt[3]{х}=х^{\frac{1}{3}}$ існує для будь-якого *х*, $а^{\frac{1}{3}}>0$ при всіх *а*. Учні часто допускаються помилки, вважаючи розв’язком рівняння єдиний корінь *х = а*, адже при від’ємних значеннях *а* дана рівність неможлива.

Відповідь. Якщо $а\geq 0$, то *х = а*; якщо $а<0$, то розв’язків немає.

***Вправа*** 10. Розв’язати рівняння $\frac{х-а}{х-1}=0$.

Розв’язання.

Очевидно, що *х = а* – єдиний корінь рівняння, проте слід пам’ятати, що $х\ne 1$, а тому $а\ne 1$.

Відповідь. Якщо $а\ne 1$, то *х = а;* якщо *а=1*, то розв’язків немає.

***Вправа*** 11. Розв’язати нерівність $(а-1)\sqrt{х}\leq 0$.

Розв’язання

Зауважимо, що $\sqrt{х }\geq 0$ для всіх невід’ємних *х*. Очевидно, що відповідь залежить від знака двочлена *а -1*. При $а\leq 1, $ $а-1\leq 0$ і дана нерівність справедлива для всіх $х\geq 0$. А для всіх $а>1$, $а-1>0$, очевидно, що дана нерівність інших розв’язків крім *х=0* немає.

Відповідь. Якщо $а\leq 1,$ то $х\geq 0$; якщо $а>1$, то *х=0.*

***Вправа*** 12. При яких натуральних значеннях а корінь рівняння

 $\left(а+2\right) х=5$ є натуральним числом?

Розв’язання

Лінійне рівняння $\left(а+2\right)х=5 має корінь, за умови а+2\ne 0$, тоді $х=\frac{5}{а+2}.Корінь рівняння є натуральним числом, якщо а+2$

* дільник числа 5, тобто при а=3.

Відповідь. 3.

***Вправа*** 13. При яких цілих значеннях коренем рівняння $\left(а+1\right)х=7$ є ціле число?

Розв’язання

При $а+1\ne 0$ рівняння $\left(а+1\right)х=7$ має корінь $х=\frac{7}{а+1}.Вираз \frac{7}{а+1} набуватиме цілих значень, за умови, що а+1$ є цілим дільником числа 7. Оскільки число 7 є простим числом, то його цілими дільниками є числа: 1; 7; -1; -7. Отже, значення параметра знайдемо з таких умов: а+1=1, а+1=7, а+1= -1, а+1= -7.

Розв’язавши ці рівняння, маємо а = 0, а = - 2, а = - 8, а = 6.

Відповідь. -8; -2; 0; 6.

**Тема 2. Лінійні рівняння та нерівності з параметрами**

Розв'язки лінійного рівняння

Рівняння  називається лінійним, якщо коефіцієнт .

* воно має єдиний розв'язок ;
* якщо обидва коефіцієнти дорівнюють нулю *а=0* і *b=0*,

 то рівняння перетворюється в тотожність ,

 і його розв'язками є всі дійсні числа.

* якщо  і , то рівняння перетворюється в неправильну рівність  і воно не має розв'язків.

***Вправа*** 14. Розв’язати рівняння

1. $2а\left(а-2\right)х=а-2$

$$Розвязання$$

1. Знайдемо ті значення параметра, які перетворюють у нуль коефіцієнт при х:

$2а\left(а-2\right)=0$, *а=0* або *а=2*.

Якщо *а=0,* рівняння матиме вигляд$0∙х=-2$, таке рівняння розв’язків немає.

Якщо *а=2*, то $0∙х=0$, тобто х – будь-яке число.

Якщо $а\ne 0$, $а\ne 2$, то $х=\frac{а-2}{2а(а-2)}=\frac{1}{2а}$.

Відповідь. Якщо *а=0*, то немає коренів; якщо *а=2*, то *х* -будь-яке число: якщо $а\ne 0, а\ne 2$, то $х=\frac{1}{2а}$.

***Вправа 15.*** $\left(а^{2}-1\right)х-(2а^{2}+а-3)=0$

$$\left(а^{2}-1\right)х=2а^{2}+а-3$$

$$\left(а-1\right)\left(а+1\right)х=\left(2а+3\right)(а-1)$$

$Розглянемо випадок$: $\left(а-1\right)\left(а+1\right)=0$, $а=\pm 1$.

$Якщо а=1, то 0∙х=0$, тобто х – будь-яке число.

Якщо *а=-1*, то $0∙х=-2$, це рівняння розв’язків немає.

Якщо $а\ne \pm 1$, то $х=\frac{2а+3}{а+1}$.

Відповідь. Якщо а=1, то х – будь-яке число; якщо $а=-1$, то розв’язків немає; якщо $а\ne \pm 1$, то $х=\frac{2а+3}{а+1}$.

***Вправа 16.*** $\left(а^{2}+2\right)х=а\left(2-3х\right)+2$

$$\left(а^{2}+2\right)х=2а-3ах+2$$

$$(а^{2}+3а+2)х=2а+2$$

$$\left(а+1\right)\left(а+2\right)х=2(а+1)$$

1. $\left(а+1\right)\left(а+2\right)=0$, $а=-1$, або $а=-2$.

Якщо $а=-1$, то $0∙х=2∙0$, х – будь-яке число.

Якщо $а=-2$, то немає коренів.

1. Якщо $а\ne -1$, $а\ne -2$, то $х=\frac{2(а+1)}{\left(а+1\right)(а+2)}=\frac{2}{а+2}$.

Відповідь. Якщо $а=-2$, то рівняння немає коренів; якщо $а=-1$, то х – будь-яке число; якщо $а\ne -1$, $а\ne -2$, то $х=\frac{2}{а+2}$.

***Вправа*** 17. Розв’язати рівняння $\left(х-1\right)\sqrt{х-а}=0$.

Розв’язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\left\{\begin{array}{c}х\geq а,\\\left[\begin{array}{c}х=1,\\х=а.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Звідси $х=а$ - корінь даного рівняння при будь-якому *а*, а *х=1* – корінь лише при *х = а*.

Відповідь. Якщо $а<1$, то $х=а$, або $х=1$; якщо $а=1$, то $х=1$; якщо $а>1$ , то $х=а$.

***Вправа*** 18. При яких а нерівність $\left(х-а\right)(х-2)\leq 0$ має єдиний розв’язок?

Розв’язання

Очевидно, що а=2 задовольняє вимозі задачі. Дійсно, при *а=2* отримуємо нерівність $(х-2)^{2}\leq 0$, що має єдиний розв’язок. Для випадку, коли $а\ne 2$, розв’язком нерівності буде відрізок, тобто безліч розв’язків.

Відповідь. *а=2.*

***Вправа*** 19. При яких значеннях *а* розв’язком нерівності

 $\left(х-а\right)^{2}\left(х-2\right)\left(х+3\right)\leq 0 $буде відрізок?

Розв’язання

Оскільки $(х-а)^{2}\geq 0$, то дана нерівність рівносильна системі:

$$\left\{\begin{array}{c}\left(х-2\right)(х+3)\leq 0,\\х=а.\end{array}\right.$$

Розв’язком нерівності системи буде відрізок $\left[-3;2\right]$. Отже, при $а\in \left[-3;2\right]$ розв’язком рівняння також буде відрізок.

Відповідь. $-3\leq а\leq 2$.

***Вправа*** 20. При кожному значенні розв’язати рівняння

 $\left(а^{2}-9а\right)х=а^{2}-18а+81$.

Розв’язання

Запишемо дане рівняння у вигляді $х=\frac{а^{2}-18а+81}{а^{2}-9а}=\frac{(а-9)^{2}}{а(а-9)}$.

Якщо а=9, то рівняння набуває вигляду 0$∙х=0$, коренем цього рівняння є будь-яке число;

Якщо $а\ne 0$, $а\ne 9$, то $х=\frac{а-9}{а}.$

Відповідь. Якщо $а=0$, то коренів немає; якщо $а=9$, то х - будь-яке число; якщо $а\ne 0$, $а\ne 9$, то $х=\frac{а-9}{а}.$

***Вправа*** 21. Розв’язати рівняння $\frac{х}{а}+2=7-х$, де а – параметр.

Розв’язання.

Оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю, то а=0 не належить області допустимих значення параметра а.

Перетворимо рівняння: $\frac{х}{а}+х=5$, $х(\frac{1}{а}+1)=5$.

Для $а\ne 0$ розглянемо два випадки:

1. Коефіцієнт при х дорівнює нулю, тобто $\frac{1}{а}+1=0$, $а+1=0$, $а=-1$.

Тоді маємо рівняння: $0∙х=5$, що не має коренів.

1. Коефіцієнт при х не дорівнює нулю, тобто $\frac{1}{а}+1\ne 0$, $а\ne -1$. Тоді $х=\frac{5а}{а+1}$.

Відповідь. Якщо $а=-1$, то рівняння коренів немає; якщо $а\ne -1$, то $х=\frac{5а}{а+1}$.

**Тема 3. Квадратний тричлен. Квадратична функція.**

*Класифікація задач на дослідження квадратного тричлена*

*Нехай* $y=A(а)x^{2}+B(а)x+C(а)$ *- квадратний тричлен, коефіцієнти якого залежать від параметра а;* $D=B^{2}-4AC$ *– дискримінант цього рівняння;* $х\_{0}=-\frac{В}{2А}$ *- абсциса вершини параболи;* $y\_{0}=-\frac{D}{4А}$ *- ордината вершини параболи;* $y\left(α\right)=f\left(α\right)=Aα^{2}+Bα+C$*- значення квадратного тричлена при х=*$ α$*.*

*Сформулюємо такі основні задачі:*

1. *Розв’язати рівняння* $A\left(а\right)x^{2}+B\left(а\right)x+C\left(а\right)=0$ *(А1)*
2. *Розв’язати одну з нерівностей (Б1) або їх систему:*
3. *Знайти всі значення а, за яких рівняння має дійсні корені, і визначити їх знаки*
4. *Дослідити розташування дійсних коренів рівняння (А1) відносно заданої точки чи проміжку*
5. *Знайти всі значення параметра а,за яких з однієї нерівності випливає інша*
6. *Визначити всі значення а, за яких корені рівняння (А1) задовольняють задану умову*
7. *Знайти всі значення параметра а, за яких рівняння* $А\_{1}\left(а\right)x^{2}+В\_{1}\left(а\right)x+С\_{1}\left(а\right)=0$

*та* $А\_{2}\left(а\right)x^{2}+В\_{2}\left(а\right)x+С\_{2}\left(а\right)=0$ *мають спільні корені (або хоча б один спільний корінь)*

1. *Знайти всі значення а, за яких квадратний тричлен*

$y=A(а)x^{2}+B(а)x+C(а)$ *чи задана функція* $Р(х\_{1}:х\_{2})$*, де* $х\_{1},х\_{2}$ *- дійсні корені рівняння (А1), набуває найбільшого (найменшого) значення на заданому проміжку.*

***Вправа*** 22. Розв’язування квадратного рівняння з коефіцієнтами, залежними від параметра:

$A\left(а\right)x^{2}+B\left(а\right)x+C\left(а\right)=0$ (1)

$$Під час розвязання \left(1\right) треба врахувати, що при $$

$$А=0 це рівняння буде лінійним, тому рівняння \left(1\right)$$

еквівалентне сукупності двох систем:

$\left\{\begin{array}{c}А=0,\\Вх+С=0\end{array}\right.$ та $\left\{\begin{array}{c}А\ne 0, В^{2}-4АС\geq 0,\\х\_{1,2}=\frac{-В\pm \sqrt{В^{2}-4АС}}{2А}.\end{array}\right.$ (2)

Якщо $х\_{1},х\_{2}$ - корені рівняння $A\left(а\right)x^{2}+B\left(а\right)x+C\left(а\right)=0$, то при $А>0$ маємо $х\_{1}<х\_{2}$, а при $А<0$ $х\_{1}>х\_{2}$.

***Вправа*** 23. Розв’язати рівняння

 $\left(а-2\right)х^{2}-4\left(а+3\right)х+а-1=0$

Розв’язання

Дане рівняння еквівалентне сукупності двох систем (див. (2)):

$\left\{\begin{array}{c}а=2,\\х=\frac{1}{20}\end{array}\right.$ та $\left\{\begin{array}{c}а\ne 0, 3а^{2}+27а+34\geq 0,\\х\_{1,2}=\frac{-2(а+3)\pm \sqrt{3а^{2}+27а+34}}{а-2}.\end{array}\right.$

Розв’язуючи нерівність $\left(а-2\right)х^{2}-4\left(а+3\right)х+а-1\geq 0$, знаходимо ті значення а, за яких $х\_{1},х\_{2}$ набувають дійсних значень:

$а\in \left(-\infty ;\right.\left.\frac{-27-\sqrt{321}}{6}\right]∪\left[\frac{-27+\sqrt{321}}{6}\right.;\left.\infty \right)$\$\left\{2\right\}$, то

$$\begin{array}{c}\\х\_{1,2}=\frac{-2(а+3)\pm \sqrt{3а^{2}+27а+34}}{а-2}.\end{array}$$

Відповідь. Якщо а=2, то х=$\frac{1}{20}$; якщо $а\in \left(-\infty ;\right.\left.\frac{-27-\sqrt{321}}{6}\right]∪\left[\frac{-27+\sqrt{321}}{6}\right.;\left.\infty \right)\\left\{2\right\}, то х\_{1,2}=\frac{-2(а+3)\pm \sqrt{3а^{2}+27а+34}}{а-2}$

***Вправа 24.***  Розв’язати нерівність

 $\left(а^{2}-1\right)х^{2}-2\left(а^{2}+3а+2\right)х+а+2>0$.

$Розвязання$.

$Розглянемо спочатку випадок, коли дана нерівність буде $лінійною, тобто $а^{2}-1=0$, $а=\pm 1$.

Підставимо ці значення *а* в нерівність і одержимо при *а=1*:

$-12х+3>0$, $х<\frac{1}{4}$, а при *а=-1*: 1>0 , $х\in R$.

При $а\ne \pm 1$ обчислимо дискримінант D і подамо його у формі, зручній для визначення проміжків знакосталості:

$\frac{D}{4}=(a^{2}+3a+2)^{2}-\left(a^{2}-1\right)\left(a+2\right)=\left(a^{2}+2a+3\right)\left(a+1\right)(a+2)$;

На паралельних координатних осях а відкладаємо проміжки знакосталості D та А (мал.1)

(мал.1)

Провівши через точки а= -2, а= -1, а=1 вертикальні прямі, одержимо проміжки, на кожному з яких легко вказати вид розв’язку даної нерівності.

$х\_{1}=\frac{а^{2}+3а+2-\sqrt{\frac{D}{4}}}{a^{2}-1}$, $х\_{1}=\frac{а^{2}+3а+2+\sqrt{\frac{D}{4}}}{a^{2}-1}$

$Відповідь.$

Якщо $а\in \left(-\infty ; -2\right)∪\left(1;\infty \right)$, то $х\in \left(-\infty ;х\_{1}\right)∪\left(х\_{2};\infty \right)$

Якщо *а=2*, то $х\in \left(-\infty ;0\right)∪\left(0;\infty \right)$

Якщо $а\in \left(-2; -1\right), то $ $х\in \left(-\infty ;\infty \right)$

Якщо $а\in \left(-1; 1\right), то$ $х\in \left(х\_{2};х\_{1}\right)$

*Розв’язання задач, пов’язаних із знаходженням значень параметра, при яких корені квадратного рівняння задовольняють задані умови*

*Для визначення значень параметра а, при яких корені квадратного рівняння* $Ax^{2}+Bx+C=0$$х\_{1}$ *та* $х\_{2}$ *при* $А\ne 0$ *задовольняють умову*

$Р\left(х\_{2};х\_{1}\right)$*=0, розглянемо систему рівнянь, еквівалентну поставленій задачі:*

$$\left\{\begin{array}{c}х\_{1}+х\_{2}=\frac{-В}{А},\\х\_{1}∙х\_{2}=\frac{-С}{А},\\Р\left(х\_{2};х\_{1}\right)=0.\end{array}\right.$$

*Визначимо з довільної пари рівнянь* $х\_{1}$ *та* $х\_{2}$ *і, підставляючи знайдені вирази в рівняння, що залишилося, одержимо співвідношення для знаходження шуканих значень а. При виборі пари рівнянь для визначення* $х\_{1}$ *та* $х\_{2}$ *варто виходити з простоти їх розв’язання. Дискримінант має бути невід’ємний.*

***Вправа 25***. При яких значеннях а один з коренів рівняння

$$8х^{2}+2\left(1-4а^{2}\right)х+(а+2)^{3}=0$$

дорівнює квадрату іншого?

Розв’язання. Для визначення шуканих значень а складемо систему, в якій два перші рівняння описують теорему Вієта для даного квадратного рівняння $х\_{1}+х\_{2}=\frac{-В}{А}=\frac{4а^{2}-1}{4}$, $х\_{1}∙х\_{2}=\frac{-С}{А}=\frac{(а+2)^{3}}{8}$, а третє співвідношення містить умову, яка накладається на його корені:$х\_{2}-х\_{1}^{2}=0$.

У даному випадку для визначення $х\_{1}$ та $х\_{2}$ зручно вибрати друге і третє рівняння системи:

$\left\{\begin{array}{c}х\_{1}∙х\_{2}=\frac{(а+2)^{3}}{8}\\х\_{2}=х\_{1}^{2};\end{array}\right.,$ тобто $\left\{\begin{array}{c}х\_{1}=\frac{а+2}{2},\\х\_{2}=х\_{1}^{2}.\end{array}\right.$

Підставляючи знайдені вирази в перше рівняння системи, одержимо:

$\frac{а+2}{2}+\frac{\left(а+2\right)^{2}}{4}=\frac{4а^{2}-1}{4}$, $а^{2}-2а-3=0$, $\left[\begin{array}{c}а=-1\\а=3.\end{array}\right.$

Відповідь. *а= -1*, або *а=3*.

***Вправа*** 26. При яких значеннях параметра а корені рівняння

$ах^{2}-\left(2а+1\right)х+3а-1=0$ (1.1)

більші 1?

Розв’язання

Очевидно, що задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра а корені квадратного тричлена $f\left(x\right)=ах^{2}-\left(2а+1\right)х+3а-1$ більші 1.

Перехід від одного формулювання задачі до іншого, підкреслює загальну ідею, що пов’язана з описом тих чи інших властивостей квадратного тричлена в їх геометричній інтерпретації на графіку.

Для того, щоб корені квадратного тричлена

 $f\left(x\right)=Ах^{2}+Вх+С, \left(А\ne 0\right)$ (1.2)

 були більші числа d, необхідно і достатньо виконання умов

 (1.3) (див. рис. 1.1)



При а=0 рівняння (1.1) має корінь х= -1, який не задовольняє умову задачі.

Розглянемо випадок $а\ne 0$. При таких а умови (1.3) запишуться у вигляді . Розв’язуючи цю систему, знаходимо, що . Очевидно, що цей же результат ми отримали б і розв’язуючи нерівність $х\_{1}>1$, де $х\_{1}$- менший корінь рівняння (1.1).

Відповідь. .

***Вправа*** 27. При яких значеннях параметра *а* один із коренів рівняння



більший числа *а*, а другий менший числа *а*?

Розв’язання

Задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра а корені квадратного тричлена лежать на дійсній осі по різні сторони від точки ?

Для розв’язування цієї задачі скористаємося тим загальним фактом, що для того щоб корені квадратного тричлена (1.2) лежали на дійсній осі по різні сторони від числа d, необхідно і достатньо виконання умови (див. рис. 1.2)



В нашому випадку ця умова приймає вигляд .

Тобто, вимогу задачі задовольняють розв’язки нерівності

, де 

(не задовольняють вимогу задачі).

Розв’язуючи отриману нерівність, знаходимо, що 

Варто сказати, що розв’язуючи цю задачу іншим способом, розглядаючи нерівності  і  досить складно.

Відповідь..

***Вправа 28***. При яких значеннях параметра *а* корені $х\_{1}$ та $х\_{2}$ рівняння задовольняють умовам 

Розв’язання

Задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра *а* тільки один, а саме – більший корінь квадратного тричлена де належить інтервалу (-1; 1), а другий – менший -1.



Вимоги в даній задачі виконуються тільки з-за умов:



Таким чином ми приходимо до системи



Розв’язуючи цю систему, приходимо до висновку, що .

Відповідь. 

***Вправа 29***. При яких значеннях параметра *а* корені рівняння

мають різні знаки і обидва по модулю менші 4?

Розв’язання

Нехай $f\left(x\right)=x^{2}-2\left(a-1\right)x+2a+1$. Тоді вимоги задачі виконуються, якщо сумісна система

, яку запишемо у вигляді і якій задовольняють всі .

Відповідь. .

***Вправа 30***. При яких значеннях параметра *а* один із коренів рівняння по абсолютній величині більший 1, а другий менший одиниці?

Розв’язання

Задача рівносильна наступній:при яких значеннях параметра а один з двох коренів квадратного тричлена належать на дійсній осі інтервалу ,

А другий розміщений поза цим інтервалом, і по модулю не дорівнює одиниці?

Користуючись графіком, відмічаємо, що рівно один корінь тричлена  належить інтервалу  тільки в тому випадку, коли числа  і  мають різні знаки (корені по модулю не дорівнюють 1), приходимодо висновку, що вимоги задачі виконуються тільки при умові яка в нашому випадку запишеться у вигляді 

Розвязуючи цю нерівність, знаходимо, що 

Відповідь. 

***Вправа 31***. При якому значенні параметра *а* парабола 

має з віссю ОХ дві спільні точки?

Розв’язання

Даний квадратний тричлен має два різних дійсних корені, якщо виконуються умови:  .

Розв’язком системи є проміжок .

Відповідь.

***Вправа 32***. При яких значеннях параметра *а* квадратний тричлен можна представити у вигляді повного квадрата?

Розвязання.

Квадратний тричлен можна представити у вигляді , якщо його корені рівні  Тобто . В даному випадку . Розв’язуючи останнє рівняння, отримуємо і .

Відповідь. , .

***Вправа 33***. Знайти значення параметра *а*, при яких нерівність  виконується для всіх *х*.

Розв’язання

Графік квадратного тричленарозміщений не нижче осі *ОХ*  при виконанні умов:

В даній задачі ці умови мають вигляд:.

Розв’язком цієї системи є .

Відповідь. .

**Тема 4. Рівняння з модулями, що містять параметр**

***Вправа 34.*** Розв’язати рівняння залежно від параметра а:

а) $\left|3х-4\right|=а+х$

б) $2х-\left|х\right|+\left|х-1\right|=а$

Розв’язання

а) $\left|3х-4\right|=а+х$, $\left|3х-4\right|-х=а$.

$3х-4=0$, $х=\frac{4}{3}$ .



Якщо $х=\frac{4}{3}$ , то $а=-1\frac{1}{3}$.

$\left\{\begin{array}{c}х<\frac{4}{3},\\-3х+4-х=а\end{array}\right.$ або $\left\{\begin{array}{c}х\geq \frac{4}{3},\\3х-4-х=а\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}х<\frac{4}{3},\\-4х=а-4\end{array}\right.$ або $\left\{\begin{array}{c}х\geq \frac{4}{3},\\2х=а+4\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}х<\frac{4}{3},\\х=-\frac{1}{4}а+1\end{array}\right. або \left\{\begin{array}{c}х\geq \frac{4}{3},\\х=\frac{1}{2}а+2\end{array}\right.$

Якщо $а<-1\frac{1}{3}$, то рівняння немає коренів; якщо $а=-1\frac{1}{3}$, то рівняння має один корінь $х=\frac{4}{3} $; якщо $а>-1\frac{1}{3} $, то рівняння має два корені $х=\frac{1}{2}а+2$ та $х=-\frac{1}{4}а+1$.

Відповідь.

Якщо $а<-1\frac{1}{3}$ : немає коренів;

якщо $а=-1\frac{1}{3}$ : $х=\frac{4}{3} $;

якщо $а>-1\frac{1}{3} $ : $х=\frac{1}{2}а+2$ , $х=-\frac{1}{4}а+1$.

б) $2х-\left|х\right|+\left|х-1\right|=а$

Розв’язання

Якщо а=1, то рівняння має безліч коренів $\left[0;1\right]$;якщо $а\ne 1$, то рівняння матиме один корінь, який знайдемо із систем

$$\left\{\begin{array}{c}2х+1=а,\\а<1;\end{array}\right. або \left\{\begin{array}{c}2х-1=а,\\а>1.\end{array}\right.$$

Отже, $х=\frac{а-1}{2}$ при $а<1$, $х=\frac{1+а}{2}$ при $а>1.$

Відповідь. якщо а=1: $х\in \left[0;1\right]; $

 якщо $а<1$ : $х=\frac{а-1}{2}$;

 якщо $а>1 : х=\frac{1+а}{2}$ .

**Тема 5. Раціональні рівняння з параметрами**

***Вправа 35.*** В залежності від значення параметра а визначити число коренів рівняння $х^{4}+\left(1-2а\right)х^{2}+а^{2}-1=0$.

Розв’язання

Дане рівняння є раціональним рівнянням четвертого степеня, отже, може мати не більше 4 коренів. Нехай $y=x^{2}$, перепишемо рівняння у вигляді $y^{2}+\left(1-2a\right)y+\left(a^{2}-1\right)=0$.

Вихідне рівняння має 4 корені, якщо останнє квадратне рівняння має 2 різні додатні корені. Достатні умови цього записані у вигляді системи (вітки параболи направлені в гору):

$\left\{\begin{array}{c}D=5-4a>0,\\y\_{в}=\frac{1}{2}(2a-1)>0,\\f\left(0\right)=a^{2}-1>0.\end{array}\right.$ звідки слідує: $а\in (1; \frac{5}{4})$.

Якщо один із коренів $y\_{1}=0,$ а другий корінь $y\_{2}>0$, то вихідне рівняння буде мати 3 корені. Запишемо умови цього випадку:

$\left\{\begin{array}{c}D=5-4a>0,\\y\_{в}=\frac{1}{2}(2a-1)>0,\\f\left(0\right)=a^{2}-1=0.\end{array}\right.$звідки слідує, що$а=1$.

Вихідне рівняння по змінній х буде мати 2 корені $х\_{1,2}=\pm \sqrt{y\_{2}}$ , якщо один із коренів $y\_{1}<0,$ а другий корінь $y\_{2}>0$. Умовою цього випадку буде нерівність $f(0)<0$, або $а\in (-1;1)$.

Крім цього, якщо $D=0 \left(a=\frac{5}{4}\right)$ , то вихідне рівняння також має 2 корені $х\_{1,2}=\pm \sqrt{\frac{3}{4}}=\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розглянемо тепер випадок, коли $y\_{1}=0,$ а другий корінь $y\_{2}<0$. Тоді вихідне рівняння по змінній х буде мати єдинний корінь $х=0$. Достатньою умовою цього є система:

$\left\{\begin{array}{c}f\left(0\right)=a^{2}-1=0,\\y\_{в}=\frac{1}{2}\left(2а-1\right)<0;\end{array}\right.$ $а=-1.$

І нарешті, вихідне рівняння не буде мати розв’язків в двох випадках: або коли обидва корені від’ємні $y\_{1}<0,$ і другий корінь $y\_{2}<0$; або коли коренів у квадратного рівняння взагалі немає, тобто $D<0$. Достатня умова відсутності коренів визначається сукупністю

****

Відповідь. Якщо $1<а<\frac{5}{4}$ : 4 корені;

 якщо $а=1$ : 3 корені;

 якщо $-1<а<1, а=\frac{5}{4}$ : 2 корені;

 якщо $а=-1$ : 1 корінь;

 якщо $а<-1, а>\frac{5}{4}$ : коренів немає.

***Вправа 36.*** При яких значеннях параметра а нерівність

 $х+\frac{7а^{2}-а-2}{х-а}<-7а$ немає розв’язків, більших 1?

Розв’язання

Приведемо нерівність до вигляду $\frac{х^{2}+6ах-а-2}{х-а}<0$. Оскільки дискримінант чисельника $\frac{D}{4}=9a^{2}+a+2>0$ для будь-якого а, запишемо рівносильну нерівність $\frac{\left(х-х\_{1}\right)(х-х\_{2})}{х-а}<0$, де

 $х\_{1}=-3а-\sqrt{9а^{2}+а+2}$; $х\_{1}=-3а+\sqrt{9а^{2}+а+2}$.

Розв’язуючи останню нерівність методом інтервалів, приходимо до висновку, що умова задачі буде виконуватися тільки при такому розміщенні точок $х\_{1}, х\_{2}$, а на осі абсцис, при якому сумісна система нерівностей:

$$\left\{\begin{array}{c}х\_{2}\leq 1,\\а\leq 1.\end{array}\right.$$

$Розвязуючи цю систему, отримуємо відповідь:а\in \left[\frac{1}{5};1\right]$.

**Тема 6. Графічні прийоми розв’язування задач з параметрами**

***Вправа 37.*** Знайти всі значення параметра а за яких графіки функцій

** та ** мають одну спільну точку.

Розв’язання.

Побудуємо на одній координатній площині графіки даних функцій. Графік **** складається із двох променів, паралельних осі ОХ і не існує при х дорівнює -2. Графік функції  отримаємо із графіка паралельним перенесенням вліво, якщо  і вправо якщо 

****

З малюнка слідує, що графіки мають одну спільну точку, якщо  Якщо а= - 3, спільних точок немає, оскільки графік проходить через виколоту точку .

Відповідь. 

1. При яких значеннях параметра а нерівність справедлива для всіх значень х?

Розв’язання

Якщо , то дана нерівність рівносильна нерівності  або 

Остання квадратна нерівність буде справедлива для всіх х з проміжку  якщо виконується умова  тобто 

Якщо , то по аналогії з попереднім випадком переходимо до нерівності яка справедлива для усіх х із розглядуваного проміжку за умови  тобто 

Відповідь.

***Вправа 38.*** В залежності від значення параметра *а* розв’язати нерівність 

Розв’язання

Перепишемо дану нерівність у вигляді 

Розглянемо дві функції (графік – пряма, паралельна осі Ох) і 

Другу функцію, розкриваючи модулі, можна записати так:





Графіком  є ламана, зображена на малюнку. Розв’язком нерівності будуть ті значення х, за яких точки графіка будуть розміщені вище точок графіка . На основі малюнка одержуємо, що якщо  таких точок немає, а якщо , то це точки виду , тобто ; якщо а=1, то розв’язки отримуємо із нерівності , звідки .

Відповідь.

***Вправа 39.*** Вказати всі значення параметра $а\ne 0$, при яких графіки функцій  та  мають тільки дві спільні точки.

Розв’язання

Перш за все відмітимо, що рівняння може мати розв’язки тільки при  за умовою). Графік отримаємо з параболи  відображенням

від’ємної частини симетрично осі Ох. Корені цієї параболи  та  вершина знаходиться в точці  і 

Графіком  є пряма, паралельна осі Ох.



З малюнка слідує, що графіки даних функцій мають дві спільні точки  при умові, що 



Відповідь. 

***Вправа 40.*** В залежності від значення параметра а розвязати систему ****

Розв’язання

З геометричної точки зору кількість розвязків системи – це число точок перетину при кожному фіксованому значенні параметра *а* кривих, заданих рівняннями системи.

Розглядуємо в першому рівнянні 4 випадки і розкриваючи модулі, отримаємо, що це рівняння задає квадрат (див. мал.). Друге рівняння – це сімейство кіл радіуса $\sqrt{а}$ ($а>0$) з центром в початку координат. Якщо а=0, то коло вироджується в точку.

****

Із малюнка слідує, що коли коло дотикається квадрата всередині, тобто якщо $\sqrt{а}=2\sqrt{2}$ (а=8) і якщо $\sqrt{а}=4$ (а=16) (коло проходить через вершини квадрата) система має 4 розв’язки.

Якщо $8<а<16$ спільних точок у кола і квадрата 8.

Якщо $а<8 і а>16$ розв’язків немає.

Відповідь.

Якщо $а\in \left(-\infty ;8\right)∪\left(4;\infty \right): $розв’язків немає;

Якщо а=8 ; а=16: 4 розв’язки;

Якщо $а\in \left(8;16\right)$ : 8 розв’язків.

**Література**

1. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів «Математики», МОН України, ст.. 24-28, 67-72
2. Т.С. Непочатова, І.О. Сіренький, Г.С. Смішко «Математичні олімпіади Хмельниччини», інформаційний вісник ХОІППО, 2009
3. П.І. Горнштейн «Задачі з параметрами», Київ, РІА «Текст», 1992
4. Є.А.Єфімов, Л.В.Коломієць, Задачі з параметрами, навчальний посібник для факультету довузівської підготовки, Самара, 2006
5. Науково-методичний журнал «Математика в школах України»